تعریف توان:

برای خلاصه کردن عمل ۲+۲+۲+۲+۲ از نماد ضرب به شکل ۲×۵ استفاده می‌کردیم. برای خلاصه کردن ۲×۲×۲×۲×۲ از نماد توان به شکل $۲^{۵}$ استفاده می‌کنیم. $۲\times۲\times۲\times...\times۲=۲^{n}$

عبارت ۲^{n} را می‌خوانیم «۲ به توان n» و به ۲ پایه و به n توان می‌گوییم.

نکته: ۱ - یک به توان هر عدد، برابر با یک است. ← $۱^{a}=۱$

۲ - صفر به توان هر عدد (به جز صفر) برابر صفر است. ← $۰^{a}=۰$

۳ - هر عدد به توان یک، برابر خودش است. ← $a^{۱}=a$

۴ - مجذور هر عدد، برابر همان عدد به توان ۲ است. $a^{۲}=$ مجذور a

۵ - مکعب هر عدد، برابر همان عدد به توان ۳ است. $a^{۳}=$ مکعب a

توان:

توان از تکرار ضرب یک عدد در خودش جلوگیری می‌کند. a^{b} یعنی اینکه عدد a را b مرتبه در خودش ضرب نماییم. عدد a را پایه و عدد b را توان یا نما گوییم.

مثال) $۲^{۵}=۲\times۲\times۲\times۲\times۲$ (۵ مرتبه) $\Rightarrow$ پایه $=۲$ ، نما $=۵$

مثال) $\left(\frac{۳}{۷}\right)^{۳}=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۷}$ (۳ مرتبه) $\Rightarrow$ پایه $=\frac{۳}{۷}$ ، نما $=۳$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) $۵^{۳}-۲^{۳}=(۵\times۵\times۵)-(۲\times۲\times۲)=۱۲۵-۸=۱۱۷$

ب) $۷^{۳}+۳^{۳}+۱^{۳}=(۷\times۷\times۷)+(۳\times۳\times۳)+(۱\times۱\times۱)=۳۴۳+۲۷+۱=۳۷۱$

ج) $۳^{۴}+۲^{۴}+۱^{۴}=(۳\times۳\times۳\times۳)+(۲\times۲\times۲\times۲)+(۱\times۱\times۱\times۱)=۸۱+۱۶+۱=۹۸$

د) $۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+۴^{۲}+۵^{۲}=(۱\times۱)+(۲\times۲)+(۳\times۳)+(۴\times۴)+(۵\times۵)=۱+۴+۹+۱۶+۲۵=۵۵$

مثال) مربعی به ضلع ۱۳ سانتی متراست، مساحت این مربع چقدر است؟

حل: مساحت مربع $=۱۳^{۲}=۱۳\times۱۳=۱۶۹$

محاسبه‌ی عبارت توان‌دار:

برای محاسبه‌ی یک عبارت که در آن از عددهای توان‌دار نیز استفاده شده است باید ترتیب (اولویت) عملیات را که در گذشته فرا گرفتیم به‌صورت زیر تغییر دهیم: ۱ - پرانتز ۲ - توان ۳ - ضرب و تقسیم ۴ - جمع و تفریق

نکته: هر عدد به غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، حاصل برابر ۱ می‌باشد. $a^{۰}=۱ \quad (a \neq ۰)$

نکته: اگر پایه‌ی یک عدد توان‌دار، عددی منفی باشد و به توان عددی فرد برسد، حاصل برابر عددی منفی است.

$(-۲)^{۳}=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=-۸$

نکته: اگر پایه‌ی یک عدد توان‌دار عددی منفی باشد و به توان عددی زوج برسد، حاصل برابر عددی مثبت است.

$(-۲)^{۲}=(-۲)\times(-۲)=-۴$

نکته: اعداد a^n و $(-a)^n$ با هم متفاوت هستند. مثال: $-۳^{۲}=-(۳\times۳)=-۹ \qquad (-۳)^{۲}=(-۳)\times(-۳)=۹$

(درصورتی‌که توان زوج باشد.)

نکته: اگر a بین ۱- و ۰ باشد، هرچه توان افزایش یابد مقدار عددی نیز بزرگ‌تر می‌شود. مثال: $(-۰/۲)^{۳}<(-۰/۲)^{۵}$

نکته: اگر a بین ۰ و ۱ باشد، هرچه توان افزایش یابد مقدار کوچک‌تر می‌شود. مثال: $(۰/۲)^{۳}>(۰/۲)^{۵}$

ضرب‌های توان‌دار

۱- ضرب توان‌دار در حالتی که پایه‌ها با هم برابرند: چنانچه در ضرب چند عبارت توانی، پایه‌ها با هم برابر باشند، یکی از پایه‌ها را می‌گذاریم و نماها را با هم جمع می‌کنیم. یعنی:

$$\boxed{a^{b}\times a^{c}=a^{a\times c}}$$

تذکر: قاعده‌ی بالا برای بیش از دو عبارت توان‌دار نیز برقرار است. یعنی:

$$a^{b}\times a^{c}\times a^{d}\times a^{e}\times \ldots = a^{b+c+d+e+\ldots}$$

تذکر: اگر عددی توان نداشته باشد، توان آن را ۱ در نظر می‌گیریم یعنی: $a=a^{۱}$

به مثال‌هایی که در زیر آمده است توجه نمایید.

۱) $۲^{۷}\times۲^{۵}=۲^{(۷+۵)}=۲^{۱۲}$

۲) $۳^{۵}\times۳^{۴}\times۳=۳^{(۵+۴+۱)}=۳^{۱۰}$

۳) $(۰/۲)^{۵}\times(۰/۲)^{۳}\times(۰/۲)^{۷}=(۰/۲)^{(۵+۳+۷)}=(۰/۲)^{۱۵}$

۴) $۵^{۷}\times۵^{۳}\times۷^{۸}\times۷=۵^{(۷+۳)}\times۷^{(۸+۱)}=۵^{۱۰}\times۷^{۹}$

تذکر مهم: در ضرب توان‌دار گاهی اوقات پایه‌ها از نظر ظاهری شبیه یکدیگر نیستند در حالی‌که با انجام اعمالی از قبیل تبدیل عدد مخلوط به کسر (و بالعکس) و یا تبدیل اعشاری به کسر (و بالعکس) شبیه یکدیگر خواهند شد برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه نمایید:

مثال) $(۰/۳)^{۵}\times\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۴}\times(۰/۳)=(۰/۳)^{(۵+۴+۱)}=(۰/۳)^{۱۰} \qquad \left(۰/۳=\frac{۳}{۱۰}\right)$

مثال) $\left(۲\frac{۱}{۴}\right)^{۷}\times\left(\frac{۹}{۴}\right)^{۸}\times(۲/۲۵)^{۲}=(۲/۲۵)^{(۷+۸+۲)}=(۲/۲۵)^{۱۷} \qquad \left(۲\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵\right)$

مثال) $(۰/۵)^{۳}\times\left(\frac{۵}{۱۰}\right)^{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}=(۰/۵)^{(۳+۲+۴)}=(۰/۵)^{۹} \qquad \left(۰/۵=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\right)$

مثال) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\times\left(\frac{۲}{۴}\right)^{۳}\times\left(\frac{۳}{۶}\right)^{۴}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{(۲+۳+۴)}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹} \qquad \left(\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}\right)$

۲- ضرب توان‌دار در حالت تساوی توان‌ها: در این حالت یکی از توان‌ها را گذاشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم که حالت دوتایی و حالت کلّی آن بدین شکل می‌باشد:

$\boxed{a^c \times b^c = (a \times b)^c = (ab)^c}$: حالت دوتایی

$a^c \times b^c \times d^c \times e^c \times \ldots = (a \times b \times c \times d \times e \times \ldots)^c = (abcde\ldots)^c$: حالت کلی

۱) $۲^۵ \times ۳^۵ = (۲ \times ۳)^۵ = ۶^۵$

۲) $۳^۴ \times ۲^۴ \times ۵^۴ = (۳ \times ۲ \times ۵)^۴ = ۳۰^۴$

۳) $(۰/۵)^۲ \times ۴^۲ \times ۵^۲ = (۰/۵ \times ۴ \times ۵)^۲ = ۱۰^۲$

۴) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴ \times ۶^۴ = \left(\frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \cancel{۶}\right)^۴ = ۱^۴ = ۱$

تذکر ۱: عدد ۱ تنها عددی است که به هر توانی که برسد، حاصل آن برابر ۱ است یعنی: $۱^n = ۱$

تذکر ۲: عدد ۱- اگر به توان زوج برسد حاصل آن برابر ۱ است و اگر به توان فرد برسد حاصل آن برابر ۱- می‌باشد، یعنی:

$$\begin{cases} (-۱)^{\text{عدد زوج}} = ۱ \\ (-۱)^{\text{عدد فرد}} = -۱ \end{cases}$$

تذکر ۳: چنانچه در ضرب توان‌دار هم پایه‌ها برابر باشند و هم نماها با هم برابر باشند می‌توانیم از هر یک از دو قاعده‌ی ذکر شده استفاده نماییم به مثال‌های زیر توجه نماییم.

مثال) $۲^۵ \times ۲^۵ = \begin{cases} ۲^{(۵+۵)} = ۲^{۱۰} & \text{(تساوی پایه ها)} \\ (۲ \times ۲)^۵ = ۴^{۱۵} & \text{(تساوی نماها)} \end{cases}$

مثال) $۷^۸ \times ۷^۸ = \begin{cases} ۷^{(۸+۸)} = ۷^{۱۶} & \text{(تساوی پایه ها)} \\ (۷ \times ۷)^۸ = ۴۹^۸ & \text{(تساوی نماها)} \end{cases}$

- ضرب عددهای توانداربا‌پایه‌های‌برابر:

چنانچه در ضرب دو یا چند عدد توان‌دار پایه‌ها برابر باشند، یکی از آن‌ها را گذاشته و نمادها را با هم جمع می‌کنیم یعنی:

$$\boxed{a^b \times a^c = a^{b+c}}$$

مثال) $۲^۵ \times ۲^۳ = ۲^{۵+۳} = ۲^۸$

مثال) $(۰/۳)^۳ \times (۰/۳)^۷ = (۰/۳)^{۳+۷} = (۰/۳)^{۱۰}$

مثال) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^۵ \times \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵+۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۷$

مثال) $۵^۳ \times ۵ = ۵^{۳+۱} = ۵^۴$

تذکر۱)اگر عددی توان نداشته باشد توان را یک درنظر می‌گیریم یعنی: $\boxed{a = a^۱}$

تذکر۲) درضرب توان‌دار بالا گاهی اوقات پایه‌ها درظاهر شبیه هم نیستند بلکه با اعمالی نظیر تبدیل اعشاربه کسر، تبدیل کسربه اعشار، ساده کردن کسر، و...شبیه هم می‌شوند.

مثال) $(۰/۳)^{۵} \times \left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۷} = ?$

حل: می دانیم $۰/۳ = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow$ جواب $= (۰/۳)^{۵+۷} = (۰/۳)^{۱۲}$

مثال) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵} \times \left(\frac{۴}{۶}\right)^{۶} = ?$

حل: $\frac{\cancel{۴}^{۲}}{\cancel{۶}_{۳}} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow$ جواب $= \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵+۶} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۱}$

تذکر۱) علاوه بر ضرب توان‌دار، تقسیم توان‌دار نیز داریم که درسال آینده بررسی خواهد شد.
تذکر۲) در حالت کلی جمع توان‌دار و یا تفریق توان‌دار نداریم.

مثال) $۲^{۳} + ۲^{۵} = (۲\times ۲\times ۲) + (۲\times ۲\times ۲\times ۲\times ۲) = ۸ + ۳۲ = ۴۰$

مثال) $۴^{۴} - ۴^{۲} - ۴ = (۴\times ۴\times ۴\times ۴) - (۴\times ۴) - ۴ = ۲۵۶ - ۱۶ - ۴ = ۲۳۶$

مثال) $۵^{۲} + ۷^{۲} = (۵\times ۵) + (۷\times ۷) = ۲۵ + ۴۹ = ۷۴$

مثال) $۲^{۳} \times ۳^{۲} = (۲\times ۲\times ۲)\times (۳\times ۳) = ۸\times ۹ = ۷۲$

مثال) $۵^{۳} \times ۳^{۵} = (۵\times ۵\times ۵)\times (۳\times ۳\times ۳\times ۳\times ۳) = ۱۲۵\times ۲۴۳ = ۳۰۳۷۵$

ساده کرن عبارت‌های توان‌دار:

در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر کافی است یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را باهم جمع کنیم.

$۵^{۷}\times ۵^{۳} = ۵^{۷+۳} = ۵^{۱۰}$

در ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی کافی است پایه‌ها را در هم ضرب کرده یکی از توان‌ها را می‌نویسیم.

$۷^{۵}\times ۳^{۵} = (۷\times ۳)^{۵} = ۲۱^{۵}$

نکته: اگر هم پایه‌ها و هم توان‌ها باهم مساوی باشند به دو روش زیر حل می‌کنیم.

روش اول: یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را باهم جمع می‌کنیم. $۳^{۴}\times ۳^{۴} = ۳^{۸} \Rightarrow ۳^{۸} = ۹^{۴}$

روش دوم: یکی از توان‌ها را می‌نویسم و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. $۳^{۴}\times ۳^{۴} = ۹^{۴} \Rightarrow ۳^{۸} = ۹^{۴}$

جذر و ریشه‌گیری:

برای نمایش ریشه‌ی دوم از نماد $\sqrt{\ }$ (بخوانید رادیکال) استفاده می‌شود. ریشه‌های دوم اعداد را با $+\sqrt{\ }$ و $-\sqrt{\ }$ نشان می‌دهیم. مثال: ریشه‌های ۴۹ شامل:

$$\begin{cases} -\sqrt{۴۹}=-۷ \\ +\sqrt{۴۹}=+۷ \end{cases}$$

نکته: اعداد منفی جذر ندارند. یعنی $\sqrt{-۱۶}$ بی‌معنی است.

نکته: منظور از جذر، ریشه مثبت عدد می‌باشد. مثال جذر ۲۵ برابر است با ۵

به نام خدا:
فصل هفتم:
درس چهارم:
جذر و ریشه

* هر عملی در ریاضی، عمل وارون و عکس دارد.

۲+۳=۵ → ۵−۳=۲ ، ۵−۲=۳

عمل وارون عمل جمع، تفریق است.

۲×۶=۱۲ → ۱۲÷۲=۶ ، ۱۲÷۶=۲

عمل وارون عمل ضرب، تقسیم است.

$۳^۲=۹ \rightarrow \square^۲=۹$

عمل وارون مجذور (توان دوم)، ریشه دوم است.

چه عددی به توان ۲ برسد حاصلش ۹ می‌شود؟

$۳^۲=۳×۳=۹$

$(-۳)^۲=(-۳)×(-۳)=+۹$

هم ۳ و هم ۳− وقتی به توان ۲ برسند حاصلشان ۹ می‌شود پس: ریشه‌های دوم ۹، ۳ و ۳− هستند.

* به ریشه دوم مثبت، جذر عدد می‌گوییم. که آن را با نماد $\sqrt{\ }$ (رادیکال) نمایش می‌دهیم.

$\sqrt{۹}$ یعنی چه عدد مثبتی به توان ۲ رسیده است (در خودش ضرب شده) که حاصلش ۹ شده؟

$۳×۳=۹ \Rightarrow \sqrt{۹}=۳$

* جذر و مجذور دو عمل وارون یکدیگرند

مجذور ۳ ← ۹

جذر ۹ ← ۳

مثال:

$\sqrt{۲۵}=۵$ $\sqrt{۶۴}=۸$

* اعداد منفی جذر ندارند:

چون: هیچ عددی نمی‌توان یافت که در خودش ضرب شود و حاصل منفی شود. اعداد از نظر علامت سه دسته‌اند: +، −، ۰

+×+=+ −×−=+

۰×۰=۰

منفی نمی‌شوند

* اعدادی که جذرشان یک عدد حسابی است را مجذور کامل می‌گوییم.

اعداد زیر، اعداد کمتر از ۱۰۰ هستند که مجذور کامل هستند:

$۰×۰=۰ \rightarrow \sqrt{۰}=۰$

$۱×۱=۱ \rightarrow \sqrt{۱}=۱$

$۲×۲=۴ \rightarrow \sqrt{۴}=۲$

$۳×۳=۹ \rightarrow \sqrt{۹}=۳$

$۴×۴=۱۶ \rightarrow \sqrt{۱۶}=۴$

$۵×۵=۲۵ \rightarrow \sqrt{۲۵}=۵$

$۶×۶=۳۶ \rightarrow \sqrt{۳۶}=۶$

$۷×۷=۴۹ \rightarrow \sqrt{۴۹}=۷$

$۸×۸=۶۴ \rightarrow \sqrt{۶۴}=۸$

$۹×۹=۸۱ \rightarrow \sqrt{۸۱}=۹$

* جذر دو عدد صفر و یک با خودشان برابر است.
* جذر همه‌ی اعداد بزرگتر از یک از خودشان کوچکتر است.
* جذر اعداد بین صفر و یک از خودشان بزرگتر است.

$\sqrt{۰٫۲۵}=۰٫۵$ ، $۰٫۲۵<۰٫۵$